

§7. Příčka mimoběžek

Def.: Necht' p, q jsou 2 mimoběžné přímky. Přímka r , která je různoběžná s oběma přímkami p, q , se nazývá příčka mimoběžek p, q .

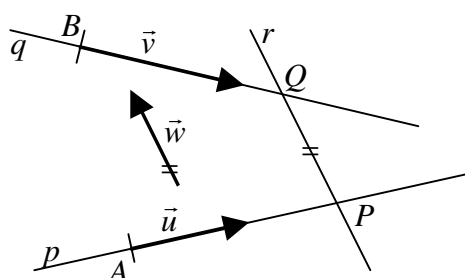
Pozn.: Necht' $p(A, \vec{u}), q(B, \vec{v})$ jsou přímky. Pak pro příčku mimoběžek $r(Q, \vec{w})$ platí:
 $\vec{w} \in \langle \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB} \rangle$.

A) Nalezení příčky r mimoběžek p, q , která je rovnoběžná s vektorem $\vec{w}$

Dáno: $p(A, \vec{u}), q(B, \vec{v}), \vec{w} \neq \vec{0}$.

Rozbor: 1) $\vec{w} \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \Rightarrow 0$ řešení

2) $\vec{w} \notin \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \Rightarrow 1$ řešení



$$\left. \begin{array}{l} P = A + k \cdot \vec{u} \\ Q = B + l \cdot \vec{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = Q - P = B + l\vec{v} - A - k\vec{u}$$

$$\overrightarrow{PQ} = x\vec{w}$$

$$\Rightarrow B + l\vec{v} - A - k\vec{u} = x\vec{w}$$

$$\overrightarrow{AB} = x\vec{w} + k\vec{u} - l\vec{v}$$

-3 rovnice o 3 neznámých x, k, l .

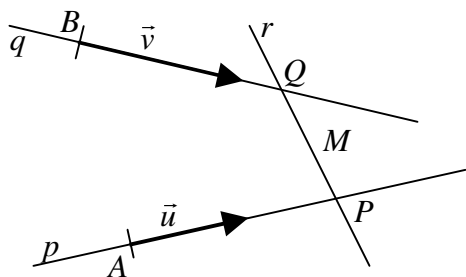
B) Nalezení příčky r mimoběžek p, q , která prochází bodem M :

Dáno: $p(A, \vec{u}), q(B, \vec{v})$, bod M

Rozbor: 1) $M \in p \vee M \in q \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení

2) $M \notin p \wedge M \notin q \Rightarrow$ a) jedna přímka je rovnoběžná s rovinou, která je dána druhou přímkou a bodem M
 $\Rightarrow 0$ řešení

b) jedna přímka není rovnoběžná s rovinou, která je dána druhou přímkou a bodem M
 $\Rightarrow 1$ řešení



$$P = A + k \cdot \vec{u}$$

$$Q = B + l \cdot \vec{v}$$

$$\overrightarrow{MP} = x \cdot \overrightarrow{MQ} \Rightarrow P - M = x \cdot (Q - M)$$

$$A + k \cdot \vec{u} - M = x \cdot (B + l \cdot \vec{v} - M)$$

$$\overrightarrow{MA} + k \cdot \vec{u} = x \cdot (\overrightarrow{MB} + l \cdot \vec{v})$$

$$\overrightarrow{MA} = x \cdot \overrightarrow{MB} + x \cdot l \cdot \vec{v} - k \cdot \vec{u}$$

$$-k \cdot \vec{u} + m \cdot \vec{v} + x \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}, \text{ kde } m = x \cdot l$$

$$\Rightarrow 3 \text{ rovnice o 3 neznámých } k, m, x$$

C) Nalezení osy o mimoběžek p, q:

Def.: Necht' p, q jsou mimoběžné přímky. Pak příčka mimoběžek o , která je kolmá k přímkám p i q , se nazývá osa mimoběžek p, q .

§8. Vzdálenost

Def.: Necht' $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq E_3$ jsou 2 podprostory Euklidovského vektorového prostoru.
Vzdáleností podprostorů $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ nazýváme nezáporné reálné číslo $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ definované takto: $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \min\{|AB| : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$, kde $|AB|$ je délka úsečky AB .

Pozn.: Jiné zavedení vzdálenosti podprostorů:
Necht' $M \subseteq R$ je množina. Pak číslo $i \in R$ nazýváme infimem množiny M , je-li největší dolní závorou množiny M , tj. jestliže platí:

$$1. \forall m \in M : i \leq m$$

$$2. \forall r \in R : \forall m \in M : r \leq m \Rightarrow i \geq r$$

Platí: Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.

Necht' $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq E_3$ jsou 2 podprostory Euklidovského vektorového prostoru a necht' $D = \{|AB| : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. Pak vzdáleností podprostorů $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ nazýváme infimum množiny D .

Platí: Má-li množina D nejmenší prvek n , pak tento prvek je infimum
 $\Rightarrow n = \rho(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Pozn.: Jestliže $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mají nějaký společný bod, pak $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$.

A) Vzdálenost 2 bodů v E_2, E_3

$$\rho(A, B) = |AB| = |\overrightarrow{AB}|$$

V.8.1.: Necht' $A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, b_3]$ jsou 2 body v E_3 (resp. v E_2).

$$\text{Pak platí: } \rho(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3(2)} (b_i - a_i)^2}$$

B) Vzdálenost bodu od přímky v E_2

$\rho(A, p) = \rho(A, A_0)$, kde A_0 - kolmý průmět bodu A na přímku p

$$p : ax + by + c = 0; \quad [a, b] \neq [0; 0], \quad \vec{n} = (a, b), \quad A[a_1, a_2]$$

$$\underline{q} \perp p : x = a_1 + ta, \quad y = a_2 + tb$$

$$A_0[a_1 + t^*a, a_2 + t^*b] \in p \cap q :$$

$$a(a_1 + t^*a) + b(a_2 + t^*b) + c = 0$$

$$t^*(a^2 + b^2) = -aa_1 - ba_2 - c$$

$$t^* = \frac{-aa_1 - ba_2 - c}{a^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned}\rho(A, p) &= \rho(A, A_0) = |\overrightarrow{AA_0}| \\ \overrightarrow{AA_0} &= A_0 - A = (t^* a, t^* b) \\ |\overrightarrow{AA_0}| &= \sqrt{(t^* a)^2 + (t^* b)^2} = |t^*| \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|aa_1 + ba_2 + c|}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \frac{|aa_1 + ba_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\end{aligned}$$

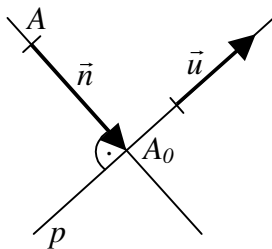
V.8.2.: Necht' $A[a_1, a_2] \in E_2$ je bod, $p: ax + by + c = 0; [a, b] \neq [0; 0]$ je přímka.

Pak platí: $\rho(A, p) = \frac{|aa_1 + ba_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

C) Vzdálenost bodu od přímky v E_3

$\rho(A, p) = \rho(A, A_0)$, kde A_0 - kolmý průmět bodu A na přímku p

I. způsob:



$$p(P, \vec{u}), P[p_1, p_2, p_3], \vec{u}(u_1, u_2, u_3), A[a_1, a_2, a_3]$$

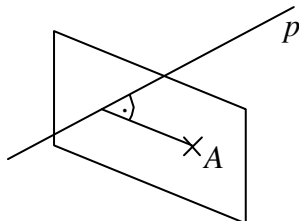
$$A_0[p_1 + t^* u_1, p_2 + t^* u_2, p_3 + t^* u_3]$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AA_0} = (p_1 - a_1 + t^* u_1, p_2 - a_2 + t^* u_2, p_3 - a_3 + t^* u_3)$$

$$\vec{n} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$$

- 1 rovnice o 1 neznámé t^* , po určení t^* určíme A_0 .

II. způsob: určení rovnice roviny ρ , která prochází bodem A a je kolmá k přímce p .

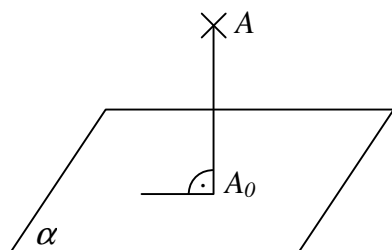


$$p \cap \rho = \{A_0\}$$

III. způsob: vyjádření $|\overrightarrow{AX}|$, kde X je libovolný bod přímky p , jako funkci proměnné t (parametr přímky) a určení minima této funkce.

D) Vzdálenost bodu od roviny v E_3

$\rho(A, \alpha) = \rho(A, A_0)$, kde A_0 je kolmý průmět bodu A do roviny α .



$$\alpha: ax + by + cz + d = 0; \quad [a, b, c] \neq [0; 0; 0], \quad A[a_1, a_2, a_3]$$

$$\underline{q} \perp \alpha: x = a_1 + ta$$

$$y = a_2 + tb$$

$$z = a_3 + tc$$

$$A_0[a_1 + t^*a, a_2 + t^*b, a_3 + t^*c] \in \alpha \cap q:$$

$$a(a_1 + t^*a) + b(a_2 + t^*b) + c(a_3 + t^*c) + d = 0$$

$$t^*(a^2 + b^2 + c^2) = -aa_1 - ba_2 - ca_3 - d$$

$$\Rightarrow t^* = -\frac{aa_1 + ba_2 + ca_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\rho(A, \alpha) = \rho(A, A_0) = |\overrightarrow{AA_0}|$$

$$\overrightarrow{AA_0} = A_0 - A = (t^*a, t^*b, t^*c)$$

$$|\overrightarrow{AA_0}| = \sqrt{(t^*a)^2 + (t^*b)^2 + (t^*c)^2} = |t^*| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|-aa_1 - ba_2 - ca_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

V.8.3.: Necht' $A[a_1, a_2, a_3]$ je bod; $\alpha: ax + by + cz + d = 0, [a, b, c] \neq [0; 0; 0]$ je rovina.

Pak platí: $\rho(A, \alpha) = \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$

E) Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek v E_2

$$\rho(p, q) = \rho(A, q); A \in p \text{ libovolný bod}$$

$$p: ax + by + c_1 = 0$$

$$q: ax + by + c_2 = 0; \quad [a, b] \neq [0; 0]$$

$$\text{zvolíme } A[a_1, a_2] \in p:$$

$$\rho(A, q) = \frac{|aa_1 + ba_2 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{podle V.8.2.})$$

$$A \in p : aa_1 + ba_2 + c_1 = 0 \Rightarrow aa_1 + ba_2 = -c_1$$

$$\Rightarrow \rho(p, q) = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

V.8.4.: Necht' $p : ax + by + c_1 = 0$, $q : ax + by + c_2 = 0$ jsou 2 různé rovnoběžky,
 $[a, b] \neq [0; 0]$, $c_1 \neq c_2$.

$$\text{Pak platí: } \rho(p, q) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

F) Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek v E_3

$$\rho(p, q) = \rho(A, q), \text{ kde } A \in p \text{ libovolný bod.}$$

Na přímce p zvolíme libovolný bod, dále viz C).

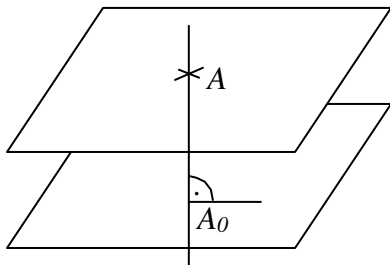
G) Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné v E_3

$$\rho(p, \alpha) = \rho(A, \alpha), \text{ kde } A \in p \text{ libovolný bod.}$$

Na přímce p zvolíme libovolný bod, dále viz D).

H) Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin v E_3

$$\rho(\alpha, \beta) = \rho(A, \beta), \text{ kde } A \in \alpha \text{ libovolný bod.}$$



$$\alpha : ax + by + cz + d_1 = 0$$

$$\beta : ax + by + cz + d_2 = 0; \quad [a, b, c] \neq [0; 0; 0]$$

$$A[a_1, a_2, a_3] \in \alpha$$

$$\rho(A, \beta) = \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (\text{podle V.8.3.})$$

$$A \in \alpha : aa_1 + ba_2 + ca_3 + d_1 = 0 \Rightarrow aa_1 + ba_2 + ca_3 = -d_1$$

$$\Rightarrow \rho(\alpha, \beta) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

V.8.5.: Necht' $\alpha: ax + by + cz + d_1 = 0$, $\beta: ax + by + cz + d_2 = 0$ jsou 2 různé rovnoběžné roviny, $[a, b, c] \neq [0; 0; 0]$, $d_1 \neq d_2$.

Pak platí:
$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

I) Vzdálenost dvou mimoběžných přímek v E_3

$$\rho(p, q) = \rho(\alpha, \beta), \text{ kde } p \subseteq \alpha, q \subseteq \beta; \alpha \parallel \beta$$

I. způsob: z definice:

$$p(A, \vec{u}), q(B, \vec{v})$$

Určení normálového vektoru obou rovin:

$$\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta = \vec{u} \times \vec{v} = (n_1, n_2, n_3)$$

$$\alpha: n_1x + n_2y + n_3z + d_1 = 0$$

$\wedge A \in \alpha \Rightarrow$ dosazením do předchozí rovnice určíme d_1 .

$$\beta: n_1x + n_2y + n_3z + d_2 = 0$$

$\wedge B \in \beta \Rightarrow$ dosazením do předchozí rovnice určíme d_2 , dále viz H)

II. způsob: pomocí osy mimoběžek:

Necht' o je osa mimoběžek p, q .

Určíme průniky $o \cap p = \{P\}$, $o \cap q = \{Q\}$

$$\Rightarrow \rho(p, q) = \rho(P, Q).$$

§9. Odchylka

Def.: Necht' $\vec{u}, \vec{v}$ jsou 2 nenulové vektory. Odchylku dvou vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ označujeme $\varphi = |\angle \vec{u}, \vec{v}|$ a definujeme takto:

1. Je-li $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$, $k \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow |\angle \vec{u}, \vec{v}| = 0^\circ$
2. Je-li $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$, $k \in \mathbb{R}^- \Rightarrow |\angle \vec{u}, \vec{v}| = 180^\circ$
3. Je-li $\vec{u} \neq k \cdot \vec{v}$ pro $\forall k \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow$ odchylkou vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ rozumíme velikost konvexního úhlu, který oba vektory svírají.

Pozn.: $0^\circ \leq |\angle \vec{u}, \vec{v}| \leq 180^\circ$

V.9.1.: Necht' $\vec{u}, \vec{v}$ jsou 2 nenulové vektory. Pak platí:
$$|\angle \vec{u}, \vec{v}| = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

[Dk. Plyne z definice skalárního součinu]

Pozn.: Jestliže jsou dva podprostory $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq E_3$ rovnoběžné, jejich odchylka je 0° .

A) Odchylka dvou přímek v E_2

Pozn.: Necht' p, q jsou 2 různoběžné přímky. Odchylka přímek p, q je velikost ostrého nebo pravého úhlu, který svírají.

$$0^\circ \leq |\angle p, q| \leq 90^\circ$$

V.9.2.: Necht' $p(A, \vec{u}), q(B, \vec{v})$ jsou 2 různoběžné přímky.

Pak platí:
$$|\angle p, q| = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

V.9.3.: Necht' $p: ax + by + c = 0$ ($[a, b] \neq [0; 0]$)

$$q: ex + fy + g = 0 \quad ([e, f] \neq [0; 0])$$

jsou 2 různoběžné přímky, a necht' $\vec{n}_p = (a, b), \vec{n}_q = (e, f)$.

Pak platí:
$$|\angle p, q| = \arccos \frac{|\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q|}{|\vec{n}_p| \cdot |\vec{n}_q|}.$$

V.9.4.: Necht' $p(A, \vec{u}), q: ax + by + c = 0, [a, b] \neq [0; 0]$ jsou 2 různoběžné přímky a necht' $\vec{n} = (a, b)$.

Pak platí:
$$|\angle p, q| = \arcsin \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

B) Odchylka dvou přímek v E_3

Pozn.: Necht' p, q jsou 2 různoběžné přímky. Pak jejich odchylka je rovna velikosti ostrého nebo pravého úhlu, který svírají.

Necht' p, q jsou 2 mimoběžné přímky. Pak jejich odchylka je rovna $|\angle p', q'|$, kde $p' \parallel p, q' \parallel q$ a p', q' jsou různoběžky.

$$0^\circ \leq |\angle p, q| \leq 90^\circ$$

V.9.5.: Necht' $p(A, \vec{u}), q(B, \vec{v})$ jsou 2 různoběžné nebo mimoběžné přímky.

Pak platí:
$$|\angle p, q| = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

C) Odchylka přímky od roviny v E_3

Pozn.: Necht' p, α jsou přímka a rovina navzájem různoběžné.

Pak platí: $|\angle p, \alpha| = |\angle p, q|$, kde $q = \alpha \cap \beta \wedge \beta \perp \alpha \wedge p \subseteq \beta$.

$$0^\circ \leq |\angle p, \alpha| \leq 90^\circ$$

V.9.6.: Necht' $p(A, \vec{u})$ je přímka, $\alpha: ax + by + cz + d = 0, [a, b, c] \neq [0; 0; 0]$ rovina a necht' $\vec{n} = (a, b, c)$.

Pak platí:
$$|\angle p, \alpha| = \arcsin \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}.$$

D) Odchylka dvou rovin v E_3

Pozn.: Necht' α, β jsou 2 různoběžné roviny.

Pak platí: $|\angle \alpha, \beta| = |\angle p, q|$, kde $p \subseteq \alpha, q \subseteq \beta; p \perp r, q \perp r, r \in \alpha \cap \beta$.

$$0^\circ \leq |\angle \alpha, \beta| \leq 90^\circ$$

V.9.7.: Necht' $\alpha: ax + by + cz + d = 0, [a, b, c] \neq [0; 0; 0]$,
 $\beta: ex + fy + gz + h = 0, [e, f, g] \neq [0; 0; 0]$
 jsou 2 roviny. Necht' $\vec{n}_\alpha = (a, b, c), \vec{n}_\beta = (e, f, g)$.

Pak platí:
$$|\angle \alpha, \beta| = \arccos \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|}.$$